REND. SEM. MAT.
UNIVERS. POLITECN. TORINO
Vol. 46°, 1 (1988)

Enrico Giusti

IL CALCOLO INFINITESIMALE TRA LEIBNIZ E NEWTON (1)

1. Introduzione

I nomi di Leibniz e di Newton sono oggi indissolubilmente uniti all'invenzione dell'analisi infinitesimale, una delle teorie matematiche che piú ha arricchito la matematica moderna e determinato il progresso della scienza. E non potrebbe essere altrimenti: infatti una volta abbandonate definitivamente le rivendicazioni di priorità nell'invenzione e le conseguenti accuse di plagio, e riconosciuta la sostanziale indipendenza delle scoperte dei due scienziati, i metodi elaborati da Leibniz e da Newton, salvo la differenza di notazioni, risultano praticamente equivalenti, nel senso che ogni risultato dell'analisi si può esprimere, con maggiore o minor fatica, nell'uno o nell'altro linguaggio. D'altra parte, che i due metodi fossero quanto meno simili era perfettamente chiaro ai due attori principali, sia quando si scambiano affermazioni di stima che al momento delle accuse più roventi, come anche alla folla di comprimari che intervengono a difesa dell'una e dell'altra posizione, spesso in maniera più forte di quanto non facciano e forse non vogliano gli stessi protagonisti.

Ma se lo spettacolo che si recita dalle due parti della Manica è basato sullo stesso soggetto, ciò non significa automaticamente che la regia sia

(1) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca "Storia delle matematiche" (40%) del M.P.I. Classificazione per soggetto: AMS(MOS, 1980): 01A45.

identica nei due casi, nè tanto meno che quella che è considerata la scena madre a Cambridge lo sia altrettanto ad Hannover o a Basilea. Al contrario, i punti di vista sull'importanza relativa alle varie parti di cui si compone il calcolo infinitesimale possono essere sostanzialmente differenti, ed influenzare non poco la direzione dell'indagine e in definitiva la stessa affermazione di una scuola sulla rivale.

In questo lavoro cercherò di mettere in luce queste differenze se non di contenuto almeno di prospettiva, e dunque di separare di nuovo ciò che la storia ha unito, e di ritrovare i due calcoli che il tempo e la prassi scientifica hanno fuso in uno. A tale proposito seguirò due strade complementari e convergenti: da una parte cercherò di ricostruire i diversi percorsi intellettuali di Leibniz e Newton, e dall'altra metterò a confronto le loro dichiarazioni esplicite in merito alle scoperte che costituiscono il calcolo e alla loro importanza relativa. Nel primo caso si tratterà di compiere un'analisi dei contenuti scientifici delle due teorie, nell'altro di raccogliere e confrontare le prese di posizione dei due scienziati, ed in particolar modo quelle nette ed esplicite del periodo della grande disputa sull'invenzione dell'analisi.

2. Il problema delle tangenti dalla *Géométrie* al calcolo

Un'analisi storica del calcolo infinitesimale non può che cominciare dalla geometria cartesiana. In effetti è solo nell'ambito dei problemi aperti dall'opera di Descartes e nel linguaggio elaborato nella *Géométrie* che le idee che porteranno al calcolo potranno essere formulate e sviluppate.

Descartes aveva rivoluzionato la geometria introducendo una nozione di curva basata sulla sua equazione algebrica (2) : una curva è il luogo dei punti le cui coordinate (x, y) soddisfano un'equazione

$$P(x, y) = 0$$

nella quale $P(x, y)$ è un arbitrario polinomio. Di questa nuova formulazione, evidente anche se implicita, Descartes si era servito da una parte per risolvere

(2) Sul problema della rappresentazione delle curve nella *Géométrie* si potrà vedere il mio *Numeri, grandezze e Géométrie*, negli Atti del Convegno *Descartes: il Discorso sul metodo e i Saggi di questo metodo*, Lecce 1987, come pure l'articolo di H.Bos, *On the Representation of Curves in Descartes' Géométrie*, Archive for History of Exact Sciences, 24 (1981) 295-338 (si vedano anche gli atti citati), che pure sostiene una tesi alquanto differente.

in tutta la sua generalità il cosiddetto "problema di Pappo"; e dall'altra per porre ed avviare a soluzione il problema delle tangenti.

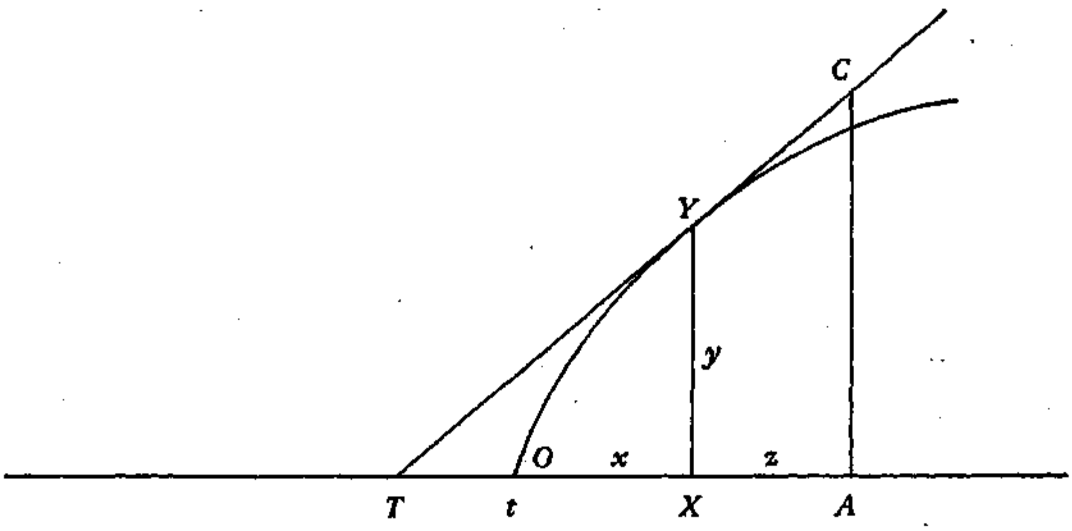
Quest'ultimo non era certo un problema nuovo. Fin dall'antichità infatti il problema di tracciare la tangente ad una curva data era stato affrontato e risolto in molti casi: erano state così trovate le tangenti al cerchio, alle sezioni coniche, ed a un certo numero di altre curve sia algebriche che trascendenti. In ogni caso però le curve della geometria classica sono tutte curve "nominate", come ad esempio la parabola, l'iperbole, la spirale. Al contrario nella geometria cartesiana, proprio a causa dell'identificazione della curva con la sua equazione, si può parlare di curve "generiche". In corrispondenza, il problema delle tangenti prende una nuova forma; non si tratta più come in passato di tracciare la tangente a questa o quella curva data, ma di trovare un metodo generale che consenta di tracciare la tangente ad una curva arbitraria. Su questo problema, che si può formulare solo nell'ambito della geometria cartesiana ed in particolare dell'identificazione tra curva ed equazione, si affaticheranno i maggiori geometri nei decenni che separano la *Géométrie* dal calcolo.

Lo stesso Descartes, come è noto, dà nella *Géométrie* un metodo per le tangenti basato sulla molteplicità delle radici. Egli osserva che se (x_0, y_0) è un punto della curva data, e cioè verificate l'equazione $F(x_0, y_0) = 0$, una retta di equazione $x = ay + b$, passante per il punto dato, sarà tangente alla curva se, sostituendo $ay+b$ al posto di x nell'equazione della curva, si ricava una nuova equazione $Q(y) = 0$ che ha una radice doppia nel punto y_0 (3) .

Il problema geometrico delle tangenti viene così ridotto a quello puramente algebrico delle radici multiple. Quello comunque che va rilevato per il nostro proposito è che il metodo cartesiano è applicabile solo alle curve la cui equazione è data mediante un polinomio $P(x, y)$. Ad esso sfuggono invece non solo le curve trascendenti, ma anche quelle, peraltro algebriche, nella cui equazione entrano dei radicali, che devono essere eliminati prima di porre in moto la macchina cartesiana; un'operazione questa che benchè sempre possibile (4) , si scontrava di fatto con insormontabili difficoltà computazionali

(3) In realtà, la formulazione originale cartesiana consisteva nel trovare un cerchio (col centro sull'asse delle x) tangente alla curva nel punto dato. Quest'ultimo fu rimpiazzato da una retta da Florimond De Beaune, nelle sue *In Geometriam Renati Des Cartes Notae Breves*, pubblicato assieme alla versione latina della *Géométrie: Geometria a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita*, Lugduni Batavorum, Maire, 1649, pag. 147, e poi in tutte le seguenti edizioni.

(4) Si veda ad esempio lo scritto di Fermat dal titolo *Novus secundarum et ulterioris ordinis*



non appena il numero ed il grado dei radicali presenti nell'equazione diveniva considerevole.

Nè maggiore efficacia aveva un secondo metodo, elaborato da Fermat, e che in linea di principio non era limitato ad equazioni polinomiali, essendo basato non sulla coincidenza delle radici ma sulla teoria dei massimi e dei minimi (5) . Per descrivere il metodo di Fermat (6) , consideriamo la curva OYB in figura, alla quale si voglia tracciare la tangente nel punto Y. Si ponga come d'uso $OX = x, XY = y$, e sia T il punto in cui la tangente YT incontra l'asse delle ascisse. Si tratta evidentemente di determinare la *sottotangente* $TX = t$. Per fare questo, consideriamo un punto generico C sulla tangente alla curva, e poniamo $z = XA$. Dalla similitudine dei triangoli TXY e TAC risulta:

$$AC = y(1 + z/t)$$

---

radicum in analyticis usus, e la *Appendix ad superiorem methodum,* in *Oeuvres de Fermat,* publièes par MM.P.Tannery et Ch.Henry, Paris, Gauthier-Villars, 1891, Volume 1, pag. 181.

(5) *Methodus ad disinquirendam maximam et minimam. De tangentibus linearum curvarum,* in *Oeuvres de Fermat,* cit.,vol.I, pag. 133-136.

(6) La descrizione del metodo di Fermat, che non troviamo nelle opere del tolosano, è compiuta seguendo l'articolo di C.Huygens, *Regula ad inveniendas tangentes linearum curvarum,* in *Oeuvres Complètes de Christiaan Huggens,* Nijoff, La Haye, 1940, vol.20, pag. 242-255.

Supponiamo ora che l'equazione della curva sia:

$$P(x, y) = 0;$$

e che la tangente si trovi, almeno localmente, sempre dalla stessa parte della curva, ad esempio che sulla tangente risulti sempre $P > 0$ (7) . Si ha allora per ogni valore di $z \neq 0$:

$$P(x + z, y(1 + z/t)) > 0$$

In conclusione, la funzione $\varphi(z) = P(x + z, y(1 + z/t))$ è sempre positiva, e si annulla per $z = 0$; essa ha dunque un minimo per $z = 0$. Si tratterà allora di determinare il valore della sottotangente t in modo che la funzione $\varphi(z)$ abbia un minimo per $z = 0$; il problema delle tangenti è dunque ridotto ad un problema minimo.

Per risolvere quest'ultimo, Fermat si riallaccia ad un'osservazione di Pappo, contenuta in un passo della *Collezione matematica* che aveva dato non poco filo da torcere ai traduttori, ed in primo luogo a Federico Commandino che in una nota (8) segnalava di non capirne appieno il significato:

> Pappus vocat minimam proportionem *μοναχὸν καὶ ελάχιστον*, *minimam et singularem*, ideo scilicet quia, si proponatur qaestio circa magnitudines datas, duobus semper locis satisfit quaestioni, sed, in minimo aut maximo termino, unicus est qui satisfaciat locus: idcirco

(7) Naturalmente, questa ipotesi non è necessaria. Peraltro essa è sempre supposta tacitamente, ed è una conseguenza della stessa definizione di tangente, quale quella data da Euclide nel caso del cerchio (*Elementi*,III, def.2): *Ευθεῖα κύκλον εφάπτεσθαι λέγεται, ήτις απτομένη τοῦ κύκλου καὶ εκβαλλομένη ου τέμνει τὸν κύκλον* (La linea retta si dice tangente al cerchio quando lo tocca, e prolungata non lo sega). Si veda comunque la critica di Beaugrand (o meglio, dello stesso Fermat) alla definizione euclidea in relazione alla tangente alla concoide, *Oeuvres de Fermat*, cit., Supplèment, pag. 112: "Où tu remarquera que la dèfinition de tangente que donne Euclide au 3me *livre del Èlemens*, ne peut convenir à la conchoïde dont il s'agit, pour ce qu'il n'y a que celle qui la touche au sommet, qui estant prolongèe ne la touche point; toute les autres la coupent ailleurs apres l'avoir touchèe."(Osserverai che la definizione di tangente data da Euclide nel terzo libro degli *Elementi*, non può adattarsi alla concoide di cui stiamo parlando, dato che c'è solo la tangente nel vertice che prolungata non la tocca; tutte le altre la secano altrove dopo averla toccata).

(8) *Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones aa federico Commandino Urbinate in latinum converae, & commentarijs illustratae*, Bononiae, ex typographia HH. de Duccijs 1660, pag. 296: "Graecus codex o *μοναχός καὶ ελάχιστος*, ... quibus verbis quid significetur ... satis perspici non potest" (il codice greco ha o *μοναχὸς καὶ ελάχιστος*, ... ma cosa voglia dire con queste parole ... non si capisce bene).

Pappus vocat *minimam et singularem*, id est unicam, proportionem omnium quae proponi possunt minimam (9) .

In altre parole, se $f(x)$ è una funzione (10) e se Z è un valore maggiore del minimo, l'equazione $f(x) = Z$ ammette sempre due soluzioni, A ed $A + E$. Al contrario, se Z è il valore minimo della funzione, c'è un unico valore A per cui risulti $f(A) = Z$. Nel primo caso, risulterà $f(A+E) = f(A) = Z$, e dunque:

[1] $$f(A+E) - f(A) = 0$$

e dividendo per E:

[2] $$\frac{f(A+E) - f(A)}{E} = 0$$

Se ora si prende Z sempre più vicino al valore minimo, i due punti A ed $A + E$ si avvicineranno, fino a coincidere quando la funzione assume il suo valore minimo, data l'unicità del punto di minimo. Posto allora $E = 0$ nella [2] (11) , si potrà trovare il punto di minimo (o di massimo) ovvero, se questo è noto, come è il caso nel problema delle tangenti, si potrà ricavare il valore di un'altra qualità incognita, come la sottotangente (12) .

Ci siamo dilumgati a descrivere il metodo di Fermat perchè esso spiega chiaramente i limiti dei metodi precedenti il calcolo, come pure le remore che si opponevano al loro superamento. Il punto delicato consiste nel passaggio dalla [2] all'equazione finale. Prima di porre $E = 0$ occorre infatti semplificare la [2] in modo che scompaia la quantità E al denominatore.

(9) "Pappo chiama la minima proporzione μοναχὸν καὶ ἐλάχιστον, minima e singolare, e ciò perchè, se si propone un problema intorno a delle grandezze date, si soddisfa alla questione sempre in due punti, ma nel termine massimo e minimo c'è un solo luogo che la soddisfaccia: e dunque Pappo chiama minima e singolare, cioè unica, la proporzione minima tra tutte quelle che possono essere proposte". *Methodus ad disinquirendam maximam et minimam.III, Ad eamdem Methodum*, in *Oeuvres de Fermat*,cit.Vol.I, pag. 142.

(10) Introduciamo qui il termine di "funzione" solo per brevità di esposizione, avvertendo che per tutto il seicento il concetto di funzione non sarà presente che in nuce. Nel nostro caso, Fermat parla ad esempio di trovare il massimo del rettangolo $ax - x^2$ o della "quantitas" $x + \sqrt{ax - x^2}$ *Oeuvres de Fermat*, cit.,Vol.I, pag. 154).

(11) Non pochi storici hanno visto in questa operazione la prima apparizione della derivata $f'(a)$. Si veda comunque a questo proposito il mio *A tre secoli dal calcolo: la questione delle origini*. Boll. U.M.I.(6)3-A (1984).

(12) Applicando il metodo alla funzione $y(1 + z/t) - f(x + z)$, ed imponendo che essa abbia un minimo per $z = 0$, si arriva all'equazione $y/t - f'(x) = 0$, dalla quale si ricava il valore della sottotangente: $t = y/f'(x) = f(x)/f'(x)$.

Ora questa semplificazione è possibile sempre quando la funzione $f(x)$ è un polinomio, e talora anche quando essa contiene qualche radicale o addirittura è trascendente. Quello che conta in questi casi infatti non è tanto il carattere qualitativo della funzione quanto la sua maggiore o minore complessità: come quello rivale di Descartes, il metodo di Fermat, che in linea di principio non è limitato ai polinomi, si dimostra incapace di trattare funzioni che contengono un numero rilevante di radici.

La ragione principale di questo insuccesso sta nella globalità dei metodi. In essi infatti la funzione $f(x)$ compare sempre come un tutto unico, e deve essere trattata come tale: anche quando essa si scrive ad esempio come somma di più termini, non è possibile operare su questi separatamente e poi combinare i risultati così ottenuti. Ciò è dovuto essenzialmente alla scelta della sottotangente come parametro per la descrizione della retta tangente. Da un punto di vista geometrico la scelta è la più naturale: dato che la tangente deve passare per il punto dato sulla curva, per individuarla basterà trovare un secondo punto, e quale sarà più semplice dell'intersezione con l'asse delle ascisse? Nondimeno, dal punto di vista analitico essa presenta l'inconveniente essenziale di una completa rigidità rispetto alle relazioni algebriche: quando l'ordinata di una curva si scrive come somma di quelle di due o più curve, non c'è nessuna relazione semplice che permetta di risalire dalle sottotangenti di queste a quella della curva di partenza([13]).

Lo stesso inconveniente è presente in tutte le elaborazioni che vengono proposte nel periodo precedente all'invenzione del calcolo([14]). I progressi che si riscontrano vanno piuttosto da una parte nella direzione di una sempre maggiore automaticità di calcolo, e cioè sulla strada che dal metodo conduce alla "formula" (Hudde, Sluse ([15])), anche se quest'ultima, in mancanza del concetto e dunque del simbolo della derivata, è sempre espressa verbalmente come "regola"; e dall'altra verso la trattazione di un certo numero di curve trascendenti, espresse tramite la quadratura di curve algebriche (Barrow ([16])),

---

([13])In altre parole, non c'è nessun modo semplice per esprimere la sottotangente della somma: $t = (f(x)+g(x))/(f'(x)+g'(x))$ in termini di $t_1 = f(x)/f'(x)$ e $t_2 = g(x)/g'(x)$.

([14])Mi limito qui ai metodi "algebrici" per le tangenti, omettendo i metodi basati sulla generazione cinematica delle curve, introdotti da Torricelli e da Roberval. Peraltro questi metodi richiedono che si conosca esplicitamente la generazione cinematica della curva, e quindi sono applicabili solo a curve particolari.

([15]) La regola di Hudde, che questi comunicò solo a un numero ristretto di matematici, tra cui Schooten e Huygens, venne pubblicata solo nel 1713; per quella di Sluse si vedano le *Philosophical Transactions*, Vol. VII, n.90, Jan.20, 1672/73.

([16])*Lectiones geometricae*, Londra 1670 (vedi in particolare le pag. 78-82).

ovvero mediante un'ascissa curvilinea (Gregory (17) , Tschirnhaus (18)).

3. Il calcolo leibniziano

Quando nella relazione [2] si pone $E = 0$, si ottiene un'equazione che si è tentati di scrivere come

$$f'(a) = 0 \tag{3}$$

Questo passaggio, che è giustificato dal punto di vista della matematica moderna, lo è molto meno storicamente. Infatti quello che manca nel metodo di Fermat è per l'appunto la derivazione, e cioè quell'operazione che fa passare da una funzione alla sua derivata. Una tale operazione peraltro non poteva emergere, mancando completamente la nozione di funzione, che non si affermerà che nel secolo successivo. Al suo posto, Leibniz introduce un'operazione, la differenziazione, che opera non sulle funzioni, che quando Leibniz scrive non esistono, ma sulle variabili e sulle loro combinazioni, e che corrisponde a prendere la differenza tra due valori infinitamente vicini delle variabili. Sono queste differenze (o *differenziali*) che Leibniz prende come parametri principali al posto della sottotangente, una scelta che gli permette di separare le difficoltà, grazie alle regole di differenziazione che egli enuncia in dettaglio all'inizio della sua famosa memoria (19) . Si tratta evidentemente di una scelta non facile, non tanto per l'intervento di quantità infinitesime *(inassegnabili)*, ché queste erano ormai entrate da tempo nel linguaggio matematico, quanto perché queste quantità perdono il loro carattere ausiliario e di artifici tecnici, destinati a sparire nella formulazione finale, per assumere invece il ruolo di parametri fondamentali per la descrizione delle curve. Le difficoltà concettuali di questa formulazione sono evidenti, al punto che Leibniz cerca di mascherarle nascondendo il carattere infinitesimo

(17) *Geometria pars universalis, inserviens quantitatum curvarum transmutationi et mensurae.* Patavii, 1668, pag. 22-24.

(18) Si vedano il *Journal des Savants* del giugno 1682, e gli *Acta Eruditorum* del dicembre dello stesso anno.

(19) *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tengentibus, quae nec fractae nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*; Acta Eruditorum, Lipsia 1684, ristampato in *G.W.Leibniz Mathematische Schriften*, a cura di C.I.Gerhart, Halle 1858 (reprint G.Holms 1962),vol.V,pag. 220-226. Nel seguito, indicheremo questa edizione con le lettere GM seguite da un numero romano indicante il volume.

dei differenziali, d'altronde implicito nelle regole di differenziazione che non potrebbero sussistere altrimenti, ed introducendo questi ultimi per mezzo della tangente, peraltro definita più avanti come quella retta che congiunge punti infinitamente vicini alla curva. Nondimeno, Leibniz è ben cosciente della superiorità del suo metodo rispetto a quelli precedenti:

> Ex cognito hoc velut *Algorithmo*, ut ita dicam, calculi huius, quem voco *differentialem*, omnes aliae aequationes differentiales inveniri possunt per calculum communem, maximaeque et minimae, itemque tangentes haberi, ita opus non sit tolli fractas ac irrationales, aut alia vincula, quod tamen faciendum fuit secundum Methodos hactenus editas ([20]) .

e ne individua con precisione gli elementi qualificanti, mettendo in luce il ruolo determinante della sostituzione dei differenziali alla sottotangente:

> Editae vero hactenus methodi talem transitum non habent, adhibent enim plerumque rectam ut DX, vel alia huiusmodi, non vero rectam *dy*... , quod omnia turbat; hinc praecipiunt, ut fractae et irrationales (quas indeterminatae ingredientur) prius tollatur ([21]) .

La differenziazione assume dunque la posizione centrale nell'elaborazione leibniziana, una chiave che da una parte apre la strada alle molteplici scoperte successive, ma allo stesso tempo richiede una notevole dose di coraggio intellettuale, dato che attraverso di essa le quantità evanescenti fanno il loro ingresso in geometria.

Più secondario è invece il ruolo delle quadrature, un problema che assieme a quello delle tangenti è tradizionalmente associato alle origini del calcolo infinitesimale. Leibniz legge la *Geometria Indivisibilium* di Cavalieri intorno al 1666, e cioè prima della *Géométrie* di Descartes ([22]) . In quel periodo egli era

([20]) *Nova methodus*, cit.,GM V, pag. 222: "Una volta noto l'*Algoritmo*, per così dire, di questo calcolo, che chiamo *differenziale*, tutte le altre equazioni differenziali si possono ottenere mediante il calcolo comune, e così trovare i massimi e i minimi, nonchè le tangenti, senza che vi sia bisogno di eliminare le quantità fratte o irrazionali, o altri impicci, come invece si doveva fare con i metodi finora pubblicati."

([21]) Ivi, pag. 2239: "I metodi finora pubblicati non hanno un tale gradino intermedio *[il calcolo del differenziale]*, ed infatti usano per lo più rette come la DX *[la sottotangente, vedi figura]* o altre simili, ma non il segmento *dy* ... il che scombina tutto; di qui deriva che si debbano in primo luogo eliminare le quantità fratte ed irrazionali che contengono le variabili."

([22]) Si veda a questo proposito la narrazione dello stesso Leibniz in *Historia et origo calculi differentialis*, GM V,pag. 392-410.

interessato alle operazioni sulle successioni numeriche, e non esita a leggere le *omnes lineae* di Cavalieri come *summa omnium linearum*, un'interpretazione che conserverà anche in seguito, come mostra eloquentemente il passaggio senza soluzione di continuità dalla notazione cavalieriana *omn y* alla $\int y$ e infine a quella definitiva $\int y dx$ ([23]) . E poiché la somma e la differenza sono evidentemente operazioni inverse l'una dell'altra, ne segue immediatamente che invertendo la differenziazione si ottengono le quadrature. Un passaggio esplicito è contenuto nella recensione al *De quadratura curvarum*, apparsa nel numero del gennaio 1705 degli *Acta Eruditorum*:

> Porro, ut dato quantitatis alicuius, velut y, valore per aliam indeterminatam, qualis x, haberi etiam potest ipsius dy (differentiae inter duas proximas y) per x, & per dx (differentiam inter duas proximas x), seu uti data quantitate y, potest inveniri differentia dy; quod nihil aliud est, quam invenire tangentes curvarum: ita vicissim dato valore ipsius dy, modo dicto exhibito, seu data differentia dy invenire terminum y, est invenire summam omnium differentiarum seu dy; quia discrimen inter duas y assignabiles extremas est summa omnium differentiarum intermediarum; & posito unam ex estremis aequalem esse nihilo, seu crescendo incipi ab 0, tunc summa illa est ultima y. Hinc dato termino v, qui sit ad a constantem, ut dy ad dx, erit rectangulum ay aequale summae omnium vdx, quae scribitur $\int vdx$, id est, aequabit aream figurae factae ex ordinatis v ductis respective in dx elementa abscissarum. Atque ita regressus a valore ipsius dy (seu ipsius $\frac{vdx}{a}$) differentiae, ad valorem ipsius y (seu ipsius $\int \frac{vdx}{a}$) est quadratura figurae, cuius abscissa x, ordinata v ([24]) .

([23]) Ancora nel 1684, e più tardi nell'*Historia et origo calculi differentialis*, troveremo in parallelo le operazioni finite assieme alle infinitesime, come ad esempio nello scritto, recentemente pubblicato da H-J Hess *(Zur Vorgeschichte der Nova Methodus* (1676-1684), Atti del Simposio "300 Jahre 'Nova Methodus' von G.W. Leibniz (1684-1984)"; *Studia Leibnitiana* 14, 1986), che probabilmente rappresenta una prima redazione della *Nova Methodus*. Scrive Leibniz: "Fundamentum Calculi: Differentiae et summae sibi reciprocae sunt, hoc est summa differentiarum seriei est seriei terminus, et differentia summarum seriei est ipse seriei terminus, quorum illud ita enuntio: $\int dx$ aequ.x, hoc ita: $d\int x$ aequ.x." (Fondamento del calcolo: Le differenze e le somme sono tra loro reciproche, cioè la somma delle differenze della serie è il termine della serie, e la differenza delle somme è lo stesso termine della serie, la prima delle quali scrivo $\int dx = x$, e la seconda $d\int x = x$).

([24]) Pag. 35: "Dunque, come assegnato il valore di una certa quantità, come y, per mezzo di un'altra indeterminata quale x, si può ottenere il valore di dy (differenza tra due y contigue) tramite x e dx (differenza di due x contigue), ovvero come, data una quantità y si può trovare la differenza dy, il che non è altro che trovare le tangenti alle curve; così reciprocamente, dato il valore di dy, nel modo che si è detto, ovvero data la differenza delle y, trovare il

D'altra parte quello delle quadrature non è che un caso particolare del problema generale dell'integrazione delle equazioni differenziali, o come si diceva allora del problema inverso delle tangenti; ed è a quest'ultimo e alle sue applicazioni geometriche e meccaniche che Leibniz e la sua scuola dedicheranno le proprie ricerche, cogliendo una serie di successi strepitosi. Ma il problema inverso delle tangenti si pone nella sua generalità solo successivamente all'introduzione dei differenziali, ed appartiene dunque non alla fase della scoperta ma a quella degli sviluppi del calcolo.

In conclusione, i due problemi classici del calcolo, le tangenti e le quadrature, si trovano in posizione fortemente asimmetrica nell'elaborazione leibniziana: problema chiave il primo, la cui soluzione richiede innovazioni importanti ed ardite; marginale invece il secondo, la cui posizione concettuale si risolve completamente nella relazione tra differenza e somma, dunque nell'ambito di una semplice rilettura di Cavalieri nel linguaggio delle sequenze numeriche. La stessa decisione di Leibniz di limitare la *Nova Methodus*, l'opera cioè in cui egli esponeva per la prima volta i fondamenti del nuovo algoritmo, al solo calcolo differenziale, dopo una prima versione in cui le differenze e le somme giocavano ruoli simmetrici ([25]) , è un indice ulteriore della preminenza concettuale della differenziazione rispetto all'integrazione, e della riduzione di questa alla prima.

4. Il calcolo newtoniano.

Se gli stessi problemi, tangenti e quadrature, si ritrovano all'origine del calcolo newtoniano, la loro posizione relativa è sostanzialmente differente. Nell'ambito di una concezione "meccanica" della geometria, Newton considera le variabili come grandezze il cui valore aumenta o diminuisce con continuità:

termine y è trovare la somma di tutte le differenze dy; poichè la differenza tra due estreme y finite è la somma di tutte le differenze intermedie; e posta una delle estreme essere zero, ossia che crescendo si cominci da 0, la somma sarà l'ultima y. Di qui, dato un termine v che stia alla costante a come dy sta a dx, il rettangolo ay sarà uguale alla somma di tutte le vdx, che si scrive $\int vdx$, cioè sarà uguale all'area della figura composta dalle ordinate v moltiplicate per i rispettivi elementi dx delle ascisse. E così, rimontando dal valore delle differenze dy (ovvero vdx/a) al valore di y (ovvero di $\int vdx/a$) si trova la quadratura della figura, la cui ascissa è x e l'ordinata v."

([25]) *Elementa calculi novi*, in H-J-Hess, *Zur Vorgeschichte der Nova Methodus, Studia Leibnitiana* 14, cit.

> Quantitates Mathematicas, non ut ex partibus quam minimis costantes, sed ut motu continuo descriptas hic considero. Lineae describuntur ... per motum continuum Punctorum; Superficies per motum Linearum; Solida per motum Superficierum; Anguli per rotationem Laterum; Tempora per fluxum continuum & sic in ceteris. Hae Geneses in rerum naturae locum vere habent, & in Motu Corporum quotidie cernuntur (26)

e l'equazione $F(x,y) = 0$ di una curva come una relazione che regola le loro variazioni relative; in altre parole, egli considera le variabili x ed y come delle quantità *fluenti* correlate dall'equazione data. Egli introduce quindi due nuove grandezze $\dot{x}$ ed $\dot{y}$, che sono le velocità istantanee, o *flussioni*, delle variabili:

> Nunc in posterum *Fluentes* vocabo quantitates has, quas considero tanquam gradatim, & indefinite crescentes ... At Velocitates, quibus singulae Fluentes augentur per Motum generantem (quas Velocitates appello *Fluxiones*, aut simpliciter *Velocitates*... (27)

I problemi geometrici vengono così ridotti, o quanto meno riformulati in termini meccancici:

> Sed antea observandum, quod, quidquid in iis arduum est, revocari potest ad duo sequentia Problemata, quae proponam de Spatio descripto per localem Motum, vel acceleratum, vel retardatum.
>
> *I. Longitudine descripti spatii semper, (id est, quavis Temporis momento) data, invenire Velocitatem Motus tempore proposto.*
>
> *II. Velocitate Motus semper data, invenire Longitudinem spatii descripti Tempore proposito* (28)

(26) *De quadratura curvarum*, pubblicata dapprima nel 1704 come appendice all'*Opticks*, e poi ristampata in *Opuscula Mathemathica, Philosophica et Philologica*, Lausanne et Genève, 1744, vol.I, pag. 203: "Considero qui le quantità matematiche non come costituite da particelle minime, ma come generate da un moto continuo. Le linee si descrivono ...tramite il moto continuo di punti, le superfici col moto delle linee, i solidi col moto delle superfici, gli angoli per rotazione dei lati, i tempi mediante un flusso continuo, e così via. Queste genesi hanno luogo nelle cose naturali, e si vedono ogni giorno nel moto dei corpi."

(27) *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, ivi, pag. 54: "Queste quantità, che io considero come crescenti gradualmente e indefinitamente, le chiamerò d'ora in poi *Fluenti*. .. E le velocità con le quali ogni fluente è aumemtata dal moto che la genera (che potrò chiamare *Flussioni*, o semplicemente velocità)..."

(28) Ivi, pag. 53: "Bisogna prima osservare che tutte le difficoltà [dello studio delle curve] si possono ridurre ai due soli problemi seguenti, che riguardano lo spazio percorso in un movimento comunque accelerato o ritardato. *I. Data sempre (cioè ad ogni istante) la*

Infine, i rapporti tra le flussioni delle variabili, che detreminano la tangente alla curva data, si potranno ricavare "differenziando" secondo opportune regole la funzione $F(x,y)$. Come in Leibniz, il ruolo centrale è giocato dalla regola che consente di trovare la flussione di un prodotto, dalla quale si deducono quelle per le potenze, le radici, e quindi, con opportuni artifici, quelle per combinazioni più o meno complesse di queste.

Le analogie matematiche con la formulazione leibniziana sono evidenti: sarà sufficiente soatituire le flussioni $\dot{x}$ ed $\dot{y}$ con i differenziali dx e dy per ottenere il metodo di Leibniz per le tangenti, dato che sono identiche le regole di differenziazione nei due casi. Altrettanto evidenti sono d'altra parte le differenze fondazionali: nella formulazione leibniziana il calcolo richiede una vera e propria rivoluzione epistemologica con l'introduzione essenziale di quantità evanescenti; con Newton restiamo invece nell'ambito delle quantità finite (29) , le velocità, la cui definizione rigorosa avrebbe certo condotto verso difficoltà analoghe a quelle insite nella teoria di Leibniz, ma che potevano essere ignorate a causa della familiarità del concetto.

---

lunghezza dello spazio percorso, trovare la velocità del moto ad un tempo dato. II. Data ad ogni istante la velocità del moto, trovare lo spazio percorso in un dato tempo." In maniera più concisa, lo stesso punto di vista è espresso nel primo dei due anagrammi contenuti nella lettera di Oldemburg per Leibniz del 24 ottobre 1676: "Data aequatione quotcumque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire; et vice versa" (Data un'equazione tra un numero arbitrario di quantità fluenti, trovare le flussioni e viceversa) *The Corrispondence of Isaac Newton*, a cura di H.W.Turnbull, Cambridge 1960, vol.II, pag. 115 e 153. Ancora più esplicita la formulazione della *Geometria curvilinea*, un'opera progettata attorno al 1690 ma mai portata a termine: "Fluens est quod continua mutatione augetur vel diminuitur. Fluxio est celeritas mutationis illius" (Fluente è ciò che aumenta o diminuisce con movimento continuo. Flussione è la velocità di tale movimento). *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, a cura di D.Whiteside, Cambridge 1967-1977, vol.IV, pag. 424. Nel seguito queste opere verranno citate rispettivamente come *Corrispondence* e *Mathematical Papers*, seguiti da un numero romano indicante il volume.

(29) Lo stesso Newton rivelerà questa differenza nello scritto, pubblicato anonimo nelle *Philosophical Transactions*, 29 (1714/15), col titolo "*An account of the book intitled* Commercium epistolicum D.Johannis Collins & aliorum De Analysi promota", e poi tradotto in latino e premesso alla seconda edizione del *Commercium*: "We have no ideas of infinitely little quantities & therefore M^r. Newton introduced fluxions into his method that it might proceed by finite quantities as much as possible. It is more natural & geometrical because founded upon the *primae quantitates nascentium rationes* which have a being in Geometry, whilst *indivisibles* upon which the Differential method is founded have no being either in Geometry or in nature." (Non abbiamo nessuna idea di quantità infinitamente piccole, e per questo Newton ha introdotto nel suo metodo le flussioni; in modo da procedere quanto più è possibile per quantità finite. Il suo metodo risulta quindi più naturale, più geometrico, perchè fondato sui primi rapporti delle quantità nascenti, che in geometria hanno pure qualche realtà; mentre gli indivisibili su cui si fonda il metodo differenziale non hanno nessuna realtà, nè in natura nè in geometria.) *Mathematical Papers VIII, pag. 597.*

Naturalmente anche il calcolo newtoniano deve far uso di quantità infinitesime, in particolare quando si vogliono ricavare le regole di differenziazione delle espressioni composte ([30]) ; ma a differenza di Leibniz, Newton può confinare queste quantità minime ma ingombranti nel rettrobottega degli artifici di calcolo, e presentare una vetrina di sole quantità finite e familiari. In definitiva, la soluzione del problema delle tangenti, che aveva richiesto a Leibniz una certa dose di coraggio intellettuale, si presentava per Newton come una naturrale conseguenza dell'interazione dei suoi punti di vista sulla cinematica e sul moto con la geometria algebrica di Descartes; dunque in un certo senso priva di un reale carattere di novità.

Quest'ultimo si potrà trovare piuttosto nell'uso continuo ed essenziale degli sviluppi in serie, che seppure introdotti in precedenza, o quanto meno indipendentemente, da altri geometri, ed in particolare da Mercator e Gregory, trovano ora un'estensione senza pari. Utilizzando un gran numero di metodi diversi, quali l'interpolazione, la divisione, l'estrazione di radice, il metodo dei coefficienti indeterminati, e l'integrazione termine a termine, Newton riesce a dare gli sviluppi di tutte le funzioni conosciute: di qui la possibilità di assumere le serie come parte integrante della teoria.

Gli sviluppi in serie appartengono al filone dei problemi di quadratura. Stante la mancanza, più volte rilevata, di una nozione abbastanza elaborata di funzione, non si sviluppa per le quadrature un calcolo analogo a quello per le tangenti. A differenza di quanto avviene con la geometria cartesiana, il metodo degli indivisibili di Cavalieri e Torricelli, anche nella versione algebrizzata di Roberval e Wallis o in quella di tipo infinitesimale di Fermat e di Pascal, non fa che stabilire un quadro generale, geometrico in Cavalieri e Torricelli, algebrico negli altri, nell'ambito del quale il geometra potrà operare per affrontare le singole quadrature senza dover ricorrere all'ingombrante metodo di esaustione. Il problema delle quadrature assume dunque una forma sostanzialmente differente da quello delle tangenti: non si tratta di trovare una regola generale, un calcolo, per dare le quadrature di figure arbitrarie, ma piuttosto, approfittando della maggiore duttilità della teoria degli indivisibili rispetto al metodo di esaustione, di trovare la quadratura di un maggior numero di figure, o al più di classi di figure, come le infinite parabole di Torricelli e di Fermat e le infinite spirali di Angeli. Una ricerca questa che,

([30]) Peraltro, il fatto che la considerazione di quantità infinitesime fosse essenziale alla teoria newtoniana, come lo era in quella leibniziana, non sfuggirà a un lettore attento come Berkeley, che la sottoporrà a severa critica nel suo *The Analist.*

via via che si esaurivano le classi più semplici e più interessanti di figure, richiedeva sforzi sempre maggiori per dare dei risultati sempre più simili a delle esercitazioni accademiche.

Per questo motivo, nel quarto di secolo successivo alla scoperta degli indivisibili, la loro forza propulsiva va progressivamente esaurendosi, mentre riprendono corpo quei problemi classici, come la quadratura del cerchio e dell'iperbole, che il successo degli indivisibili era riuscito se non a risolvere, certo a far passare in secondo piano. E terminata con la sfortunata opera di Gregorio da St.Vincent la stagione della quadratura esatta del cerchio, si sviluppano le ricerche volte a trovare dei metodi di approssimazione eleganti ed efficaci sia per l'area del cerchio che per quella dell'iperbole, e dunque per il calcolo dei logaritmi. Già Snell ([31]) (1621) aveva dato una formula di approssimazione per la lunghezza della circonferenza di raggio unitario per mezzo dei perimetri dei poligoni iscritti e circoscritti:

$$\frac{3p_n^2}{2p_{2n}+p_n} < 2\pi < \frac{1}{3}(P_{2n}+2p_{2n});$$

è però solo dopo il 1650 che tali ricerche prendono vigore, dando luogo a risultati importanti. Così Wallis (1655) trova il suo prodotto infinito ([32]) :

$$\frac{4}{\pi} = \frac{2.4.4.6.6.8\ldots}{3.3.5.5.7.7\ldots}$$

una formula riscoperta più tardi da Mengoli ([33]) ; e Huygens ([34]) dimostra le disuguaglianze:

$$\frac{4}{3}i_{2n} - \frac{1}{3}i_n < \pi < \frac{1}{3}i_n + \frac{2}{3}c_n$$

dove i_n e c_n sono le aree dei poligoni regolari di n lati, rispettivamente iscritti e circoscritti, al cerchio di raggio 1. Poco più tardi, James Gregory otterrà per le successioni i_n e c_n le formule di ricorrenza ([35]) :

$$i_{2n} = \sqrt{i_n c_n}$$

([31]) *Cyclometricus*, Lugduni Batavorum, Elzevier, 1621.

([32]) *Arithmetica Infinitorum, Opera Mathematica*, Oxonii, e Theatro Sheldoniano, 1695, pag. 468.

([33]) *Circolo*, Bologna. per l'erede di Benacci, 1672.

([34]) *De circuli magnitudine inventa*, Lugduni Batavorum, Elzevier, 1654; *Oeuvres de Huygens*, cit., vol.XII, pag. 129-131.

([35]) *Vera Circuli et hyperbolae quadratura*, Patavii. M.de Cadorinis, 1667. Per le critiche di Huygens e la controversia che ne seguì si può vedere il tomo VI delle *Oeuvres de Huygens*, cit., e in particolare le pagine 228-230, 272-289 e 368-400.

$$\frac{1}{c_{2n}} = \frac{1}{2}\frac{1}{c_n} + \frac{1}{i_{2n}}$$

a partire dalle quali pretenderà di dimostrare la trascendenza di π.

Infine nel 1682 Leibniz pubblica il suo sviluppo in serie ([36]) :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots ,$$

uno sviluppo peraltro noto sia a Gregory che a Newton, il quale a quell'epoca aveva già ottenuto gli sviluppi di tutte le funzioni trigonometriche e delle loro inverse.

Una sorte simile trovano le ricerche sulla quadratura dell'iperbole: dopo un certo numero di approssimazioni di vario tipo, l'area dell'iperbole e dunque i logaritmi vengono espressi da Mercator mediante uno sviluppo in serie, anche questo ben noto a Newton.

Nelle mani di quest'ultimo, gli sviluppi in serie subiscono una sostanziale metamorfosi. Per i geometri che lo avevano preceduto, essi erano uno tra i vari metodi di approssimazione ([37]) , e dunque si situavano nel dominio del calcolo aritmetico ed analitico, un tempo contiguo, ma distinto dal nuovo calcolo differenziale ([38]) . Al contrario, per Newton essi sono la chiave per affrontare e risolvere nella loro massima generalità i principali problemi del calcolo.

Nell'analisi newtoniana le serie hanno un duplice aspetto. Abbiamo detto che Newton era riuscito a trovare gli sviluppi in serie di tutte le funzioni conosciute: le potenze e le radici, le funzioni circolari e le loro inverse, i

---

([36]) *De vera proportione Circuli ad Quadratum circumscriptum in Numeris rationalibus a G.G.L. expressa*, Acta Eruditorum, Lipsia 1682; GM V, pag. 118.

([37]) Vedi la lettera di Wallis a Leibniz del 6/16 aprile 1697; GM IV, pag. 17: "Ubi dicitur, Nicolaum Mercatorem primum esse qui quadraturam aliquam dedit per seriem infinitam: vide annon una talis sit, *Arithmetica Infinitorum*, pr.191:

$$\square = \frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdots}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdots}"$$

(Là dove voi dite che Nicola Mercator è stato il primo a darci una quadratura servendosi di una serie infinita, guardate un po' se non lo sia anche la mia (Arith. Inf., prop.191): ...) Mi sono servito qui e altrove della versione italiana riportata in *La disputa Leibniz-Newton sull'analisi*, a cura di G.Cantelli, Boringhieri, Torino, 1958.

([38]) *Historia et origo*, GM V, pag. 393: "Utile est inventum, et appropinquationes Arithmeticas transfert ad calculum Analyticum, sed nihil ad calculum differentialem." (La scoperta è utile, e trasferisce le approssimazioni numeriche al calcolo algebrico, ma non al calcolo differenziale).

logaritmi e gli esponenziali. In realtà, a voler essere precisi, non essendo ancora stato introdotto il concetto di funzione, il seno, la tangente, il logaritmo, ecc., venivano piuttosto considerati come quantità variabili le une in relazione alle altre ([39]) . Il fatto che tutte queste quantità potessero essere espresse con delle serie, rendeva queste ultime un sostituto delle funzioni, di cui per così dire assumevano la rappresentanza ([40]) .

Di più, le serie sono per definizione una notevole estensione dei polinomi, dei quali conservano la semplicità algoritmica e strutturale.

Così ad esempio Newton risolve per mezzo delle serie il problema generale delle quadrature, riducendolo essenzialmente all'integrazione delle potenze:

> D[r] Wallis pubblished his *Arithmetica Infinitorum* in y[e] year 1655, by the 59[th] Proposition of that Book, if the Abscissa of any Curvilinear figure be called x, & m & n be numbers, & the Ordinate erected at right angles be $x^{m/n}$, the area of the figure shall be $\frac{n}{m+n}x^{(m+n)/n}$. And this is assumed by M[r]. Newton as the first rule upon which he founds his Quadrature of Curves. ...
>
> By the 108[th] Proposition of the said *Arithmetica Infinitorum* & by several other Proposition which follow it; if the Ordinate be composed of two or more Ordinates taken whith their signes + or −, the area shall be composed of two or more areas taken whith their signes + or − respectively. And this is assumed by M[r] Newton as the second Rule upon which he founds

([39]) Così Newton non parlerà di sviluppi di funzioni, ma userà frasi come: "Si ex dato sinu recto vel sinu verso arcus desideretur" (Se dato il seno retto o il seno verso si vuole trovare l'arco) (lettera ad Oldemburg, 13 giugno 1676, *Correspondence* II, pag. 25), e Leibniz risponderà: "Si numerus sit maior Unitate, ut $1+n$, tunc pro eo inveniendo mihi etiam prodiit Regula, quae in Newtoni Epistola expressa est; scilicet erit

$$n = \frac{l}{1} + \frac{l^2}{1,2} + \frac{l^3}{1,2,3} + \frac{l^4}{1,2,3,4} \quad etc."$$

(se il numero è maggiore dell'unità, come $1+n$ [ed l è il suo logaritmo] allora per trovarlo anch'io mi servo della regola che si trova espressa nella lettera di Newton, e cioè

$$n = \frac{l}{1} + \frac{l^2}{1\times 2} + \frac{l^3}{1\times 2\times 3} + \frac{l^4}{1\times 2\times 3\times 4} \quad etc.)$$

(lettera ad Oldemburg, 27 agosto 1676, GM I, pag. 117).

([40]) Questo carattere delle serie sarà così radicato che anche dopo l'affermarsi, soprattutto per merito di Eulero, della nozione di funzione, e per tutto il settecento, le funzioni e i loro sviluppi saranno considerati concetti se non identici, quanto meno intercambiali.

his merthod of Quadratures.

And the third Rule is to reduce fractions, Radicals & the affected roots of aequations into converging series when the Quadrature does not otherwise succeed, & by the first & second Rules to square the figures whose Ordinates are the single terms of the series ([41]) .

Peraltro quello delle quadrature è solo un caso particolare del problema dell'integrazione delle equazioni differenziali, di cui Newton dà una soluzione generale in termini di una serie di potenze. Il cerchio è dunque chiuso: l'uso delle serie infinite permette di andare molto al di là dei risultati della *Nova methodus*, e addirittura si propone come il metodo capace di dare la soluzione definitiva dei problemi più importanti dell'analisi. Questo punto di vista rende ancora più marginale il problema delle tangenti, centrale invece nell'elaborazione leibniziana, dato che la possibilità di sviluppare in serie ogni funzione rende applicabile al caso generale i metodi di Sluse, Hudde, e, in genere dei matematici del periodo che aveva preceduto il calcolo, e, che, come abbiamo visto erano limitati ai soli polinomi. La differenza tra i due punti di vista è particolarmente netta nella scelta degli esempi che i due scienziati portano ad illustrazione dei rispettivi metodi: mentre Leibniz tende a marcare la differenza tra le sue tecniche differenziali e quelle precedenti, suggerendo esempi complicatissimi, come la curva di equazione ([42])

$$\frac{x}{y}+\frac{(a+bx)(c-x^2)}{(ex+fx^2)^2}+ax\sqrt{g^2+y^2}+\frac{y^2}{\sqrt{h^2+kx+mx^2}}=0 .$$

Newton si limiterà sempre a polinomi, al punto che Sluse, ricevendo da Oldemburg, a cui aveva inviato il suo metodo per le tangenti perchè fosse

([41]) *Mathematical Papers* VIII, pag. 568: "Wallis pubblicò la sua *Arithmetica Infinitorum* nel 1655; dalla proposizione 59 di questo libro risulta che se x è l'ascissa di una curva, se m e n sono due numeri, e se $x^{m/n}$ sono le ordinate innalzate ad angolo retto, allora l'area della figura sarà $\frac{n}{n+m}x^{(m+n)/n}$. Questo risultato è accolto da Newton come prima regola su cui fondare la sua quadratura delle curve. [...] Inoltre per la proposizione 108 dell'*Arithmetica Infinitorum* di Wallis, e per molte altre proposizioni ad essa seguenti: se l'ordinata è costituita da due o più ordinate unite insieme dai segni + e −, anche l'area sarà allora costituita da due o più aree congiunte insieme rispettivamente dai segni + e −. Anche questa proposizione è stata assunta da Newton come seconda regola su cui fondare il suo metodo della quadratura. La terza regola consiste nel ridurre le frazioni, i radicali, le radici affette da esponente in serie convergenti, quando non è possibile trovare altrimenti la quadratura; e nel quadrare, secondo le regole prima e seconda, le figure le cui ordinate sono i singoli termini della serie".

([42]) *Nova Methodus*, GM V, pag. 223.

pubblicato nelle *Philosophical Transactions*, una copia di una lettera di Newton sullo stesso argomento, non può fare a meno di replicare:

De clar. Viri ...Methodo nihil aliud dicere possum, nisi mihi videri meam esse, qua nempe tot ante annos usus sum ([43]) .

Abbiamo così messo in luce, a dispetto di evidenti similitudini matematiche, una profonda divergenza di punti di vista riguardo all'importanza relativa delle varie dottrine che compongono il calcolo. Per Leibniz il punto cruciale è la differenziazione, che risolve il problema delle tangenti e consente di impostare quello generale delle equazioni differenziali. Di quest'ultimo si richiede peraltro la soluzione in termini finiti, dato che gli sviluppi in serie rientrano nel campo delle approssimazioni:

> Cum ait Neutonus, inventionem Curvae ... non indigere his methodis, innuit credo se intelligere Methodum tangentium inversam generalem in potestatem esse *per methodos serierum appropinquatorias*; ...; ego vero methodum querebam quae *accurate* curvam quaesitam exhibeat (saltem ex suppositis quadraturis), et cuius ope eius aequationem si quam habet, aut aliam primariam proprietatem possimus invenire. ([44])

Al contrario, per Newton il nucleo del calcolo risiede negli sviluppi in serie, e le flussioni assumono un ruolo tutto sommato marginale, essendo applicate a situazioni nelle quali già funzionavano bene i metodi precedenti. Di più, al contrario dei differenziali di Leibniz, la cui introduzione, come si è detto, rappresenta un'innovazione considerevole e richiedeva una notevole dose di coraggio intellettuale, le flussioni newtoniane si presentavano talmente naturali da sfiorare la banalità, dunque di molto minor peso in rapporto agli sviluppi in serie, questi sì realmente innovativi. Questa valutazione, o meglio svalutazione, delle flussioni sarà una costante del punto di vista newtoniano. Il passo che già nel 1676 Newton scriveva nell'*Epistola posterior*:

([43]) *Philosophical Transactions*, Vol.VIII, n. 95 (June 1673), pag. 6059: "Del metodo del Chiar. ... non posso dire altro, se non che mi sembra essere quello stesso mio, che uso ormai da molti anni."

([44]) Leibniz a Oldemburg, 21 giugno 1677; GM I, pag. 158: "Quando Newton sostiene che per ottenere una curva non è necessario ricorrere a questi metodi, ..., credo voglia intendere che si ottiene il generale metodo inverso delle tangenti *con i metodi di approssimazione delle serie*; ...Io però ricercavo un metodo capace di dare *esattamente* la curva richiesta, supposte note solo le quadrature, tramite il quale poter ritrovare la sua equazione, se ne ha una, o qualche altra sua proprietà primaria." I corsivi sono miei.

> Fundamentum horum operationum, *satis obvium quidem*, quoniam jam non possum explicationem ejus prosequi sic potius celavi: Data aequationem quotcumque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire; et vice versa (45) .

viene ribadito quasi immutato nel 1718, senza che egli sentisse il bisogno di sfumare i termini:

> I said in one of these letters (that of 24 Octob. 1676) that the foundation of the Method was obvious (46)

Naturalmente ciò non vuol dire che delle flussioni si potesse fare a meno, e Newton ha ragione quando dice che queste sono tanto essenziali per il suo metodo quanto lo sono le serie. D'altra parte, senza le flussioni alcuni problemi, come quello inverso delle tangenti, non si potrebbero nemmeno formulare analiticamente. Quello che però è chiaro, è che le serie sono la chiave principale, se non l'unica, per la soluzione generale dei problemi di calcolo. Questa differenza di prospettiva ricorre più volte nella corrispondenza di Leibniz, che insiste sulla necessità di dare soluzione in termini finiti, o quanto meno di perfezionare il metodo delle serie con criteri che permettano di stabilire quando una serie può essere espressa in termini finiti:

> Quod si haec nobis obtinuerit vir in his studiis maximus, atque effecerit, scilicet ut possumus seriem finitam convertere in finitam, quando id fieri potest, aut saltem agnoscere ex quanam finita sit deducta, tunc in methodo serierum infinitarum quae divisione atque extractione inveniuntur, vix

---

(45) Newton a Oldemberg per Leibniz, 24 ottobre 1676; *Corrispondence* II, pag. 115: "Poichè non posso dare qui il fondamento di queste operazioni, *peraltro piuttosto ovvio*, preferisco nasconderlo [in cifra]: Data un'equazione in un numero qualsiasi di quantità fluenti, trovare le flussioni e viceversa". (il corsivo è mio). L'ultima frase era anagrammata, e venne rivelata solo più tardi, senza peraltro suscitare reazioni di rilievo in Leibniz, che il 4/14 settembre 1694 così scriveva a Huygens: "Je suis bien aisé aussi de voir enfin le dechifrement des enigmes contenus dans la lettre de M.Newton à feu Mons.Oldemburg. Mais je suis faché de n'y point trouver les nouvelles Lumieres que je me promettois pour l'inverse des Tangentes." (Sono anche contento di vedere infine la decifrazione degli enigmi contenuti nella lettera del Sig.Newton al fu Sig.Oldemberg. Ma mi spiace di non trovarvi affatto quella nuova luce che mi ripromettevo sul problema inverso delle tangenti). *Oeuvres de Huygens*, cit., vol.X, pag. 675.

(46) *The history of the Method of moments, called Differences by Mr Leibniz; Mathematical Papers* VIII, pag. 605: "Ho detto in una di quelle lettere (quella del 24 ottobre 1676) che i fondamenti del Metodo erano ovvi".

quacquam amplius optandum restabit. ([47])

Con molto maggior evidenza tale divergenza di opinioni verrà alla luce in occasione della grande contesa.

5. La disputa.

Non è assolutamente nelle mie intenzioni addentrarmi nella storia, peraltro ben nota nelle sue grandi linee, di una tra le più aspre controversie che abbiano mai diviso il mondo scientifico ([48]) . D'altra parte, non è possibile passarla completamente sotto silenzio, non fosse altro perchè la maggior parte dei documenti che interessano la nostra tesi si trova nel *Commercium epistolicum*, ed in ogno caso trae la sua origine dalla contesa sull'analisi. Per evitare approssimazioni e malintesi, mi limiterò a riportare l'uno di fronte all'altro una serie di tesi di Leibniz e Newton. Sono testi che parlano da soli, e per i quali non c'è bisogno di alcun commento esplicativo, neanche per attribuirne la paternità all'uno o all'altro dei contendenti. La loro scelta è ovviamente arbitraria e determinata dalle conoscenze e dal gusto di chi scrive; ma, spero, non tendenziosa. Se, come è naturale quando si vuol sostenere una tesi, ho scelto fra tutti i testi più espliciti e meno soggetti a sfumature interpretative, è nondimeno vero che ben difficilmente si potrebbero opporre a quelli riportati degli altri scritti che li contraddicano; semmai dei testi più ambigui che non potrebbero essere interpretati che sulla base dei nostri o di altri equivalenti.

a) *L'oggetto del contendere.*

> It [il *Commercium epistolicum*] relates to a general method of resolving finite aequations into infinite ones & applying these aequations both finite & infinite to the solution of Problems by the method of fluxions & moments ([49]).

([47]) Leibniz a Oldemburg, GM I, pag. 157: "E se un uomo versatissimo in questa materia arriverà a un simile risultato, insegnandoci a trasformare una serie infinita in una finita quando ciò sia possibile, o quanto meno a riconoscere da quale serie finita sia stata dedotta, allora nel metodo delle serie infinite che si ottengono per divisione o estrazione difficilmente resterebbe ancora qualcosa a desiderare."

([48]) Per una descrizione esauriente non posso che rimandare al fondamentale studio di R.Hall, *Filosofi in guerra*, (trad.ital.) Il Mulino, Bologna, 1982.

Lorsque j'eus enfin le *Commercium epistolicum*, je vis qu'on s'y écartoit entierement du but, et que les lettres qu'on publioit ne contenoient pas un mot qui peut faire revoquer en doute mon Invention du Calcul des Differences dont s'agissoit. Au lieu de cela je remarquay qu'on se jettait sur les Series, où on accorde l'avantage à M.N[ewton] ([50]) .

He complains that the Committee have gone out of the way, in falling upon the Method of series: But he should consider that both Methods are but two Branches of one general Method of Analysis ([51]) .

Mutarunt etiam statum controversiae, nam in eorum scripto, quod nomine *Commercii Epistolici Johannis Collins* 1712 edidere eo consilio, ut Leibnitio palmam dubiam facerent, de calculo differentiali vix quicquam: utramque paginam faciunt series, quas vocant, infinitae ([52]) .

Et usi sunt arte rabolarum, ut iudicantes a re de qua agitur ad alia diverterent, nempe ad series infinitas ([53]) .

([49]) *Account; Mathematical Papers* VIII. pag. 563: "L'argomento ivi discusso [nel *Commercium epistolicum*] è il metodo generale per risolvere le equazioni finite in equazioni infinite, e applicare tanto le une che le altre alla soluzione dei problemi secondo il metodo delle flussioni e dei momenti".

([50]) *Die Briefwechsel von G.W.Leibniz mit Mathematikern*, a cura di C.I.Gerhardt, Berlin 1899 (reprint Olms 1962) pag. 276: "Quando finalmente ebbi una copia del *Commercium epistolicum*, mi accorsi che si allontanava completamente dal suo scopo, e che le lettere in esso pubblicate non contenevano una sola parola capace di porre in dubbio la mia scoperta del calcolo delle differenze, su cui verteva la vera questione. Notai che invece si preferiva puntare tutto sulle serie, dove si accorda senza difficoltà la precedenza a Newton". Nel seguito questo volume sarà indicato con *Briefwechsel*.

([51]) Osservazioni di Newton alla lettera di Leibniz a Conti, *Briefwechsel*, cit., pag. 287: "Egli [Leibniz] si duole che il Comitato si sia allontanato dal suo scopo, gettandosi ad esaminare le serie infinite; ma deve considerare che i due metodi di cui mi servo sono le due branche di un unico e identico metodo generale di analisi"

([52]) *Historia et Origo*, GM V, pag. 393: "Hanno addiritura cambiato lo stato della controversia; ed infatti in quel loro scritto, che sotto il nome di *Commercio epistolico di John Collins* hanno pubblicato allo scopo di mettere in dubbio il primato di Leibniz, si trova a malapena qualche traccia del calcolo differenziale: ogni pagina è piena delle serie cosiddette infinite".

([53]) Ivi, pag. 410: "E si son serviti dell'arte degli avvocaticchi, per stornare l'attenzione dei giudici dall'oggetto del contendere ad altro, e cioè alle serie infinite."

b) La portata del metodo.

In the year 1684 Mr.Leibniz published only the Elements of the *Calculus Differentialis*, and applied them to questions about Tangents, and *Maxima et Minima*, as Fermat and Gregory had done before; and showed how to proceed in these questions, without taking away Surds, but proceeded not to higher problems (54) .

Huius autem omnnis calculi nec vola nec vestigium in aemuli scriptis ante edita a nostro Calculi praecepta extant, neque omnino quicquam quod non Hugenius aut Barrovius praestitisse modo eodem, si eadem tractassent (55) .

c) I metodi per le tangenti

Suppose CB applyed to AB in any given angle be terminated at any curve line AC, and calling $AB\, x$ & $BC\, y$ let the relation between x & y be expressed by any aequation as

$$x^3 - 2xxy + bbx + byy - y^3 = 0$$

whereby the curve is determinated. To draw the tangent CD the Rule is this. Multiply the terms of the aequation by any arithmeticall progression according to the dimensions of y, suppose thus

$$\underset{0}{x^3} - 2\underset{1}{x}\, xy + b\underset{0}{x}\, x - b\underset{0}{b}\, x + b\underset{2}{y}\, y - \underset{3}{y^3};$$

also according to the dimensions of x, suppose thus:

$$\underset{3}{x^3} - 2\underset{2}{x}\, xy + b\underset{2}{x}\, x - b\underset{1}{b}\, x + b\underset{0}{y}\, y - \underset{0}{y^3}\ .$$

(54) Osservazioni di Newton, *Briefwechsel*, pag. 292: "Nel 1684 Leibniz pubblicò soltanto gli elementi del calcolo differenziale, che egli applicò ad alcune questioni sulle tangenti, e ad alcune altre riguardanti il metodo dei massimi e dei minimi, come Fermat e Gregory avevano fatto prima di lui; e fece vedere come si poteva procedere in questo genere di questioni, senza togliere le quantità irrazionali. Ma non passò a più alti problemi."

(55) *Historia et Origo*, GM V, pag. 409: "Ma di tutto questo calcolo non si trovano nemmeno le tracce negli scritti dell'èmulo precedenti i fondamenti del calcolo pubblicati dal nostro, nè di alcunchè che non avrebbero trovato allo stesso modo anche Huygens e Barrow, se avessero studiato gli stessi problemi."

The first product shall be the numerator, & the last divided by x the Denominator of a fraction which expresseth the lenght of BD to whose end D the tangent CD must be drawn [56] .

Eadem methodus adhiberi potest etsi radices in radicibus implicentur. Hinc si detur aequatio valde intricata, ut:

$$a+bx\sqrt{y^2+b\sqrt[3]{1+y}}+hyx^2\sqrt{y^2+y\sqrt{1-y}}=0$$

ad aliquam curvam, cuius abscissa sit y, AB, ordinata x, BC, tunc aequatio proveniens, utilis ad inveniendam tangentem TB, statim sine calculo scribi poterit, et haec erit

$$\begin{aligned} b\,dx\sqrt{y^2+b\sqrt[3]{1+y}}+\frac{bx}{2\sqrt{y^2+b\sqrt[3]{1+y}}}\left(2y\,dy+\frac{b\,dy}{3(1+y)^{2/3}}\right)+\\ +(hx^2\,dy+2hxy\,dx)\sqrt{y^2+y\sqrt{1-y}}\;+\\ \frac{hyx^2}{2\sqrt{y^2+y\sqrt{1-y}}}\left(2y\,dy+dy\sqrt{1-y}-\frac{y\,dy}{2\sqrt{1-y}}\right)=0 \end{aligned}$$ [57] .

(56) Newton a Collins, 10 dicembre 1672; *Correspondence*, cit., vol. I, pag. 247: "Sia AB l'ascissa e CB l'ordinata, che forma con l'ascissa un angolo qualsiai; si ponga $AB = x$ e $BC = y$, e si esprima il rapporto fra x e y con una qualsiasi equazione, per esempio $4x^3-2xxy+bxx-bbx+byy-y^3=0$ con cui si determina la curva AC. Allora la regola per condurre la tangente sarà: si moltiplichino tutti i termini di questa equazione per una qualsiasi progressione aritmetica, secondo le dimensioni di y, cioè

$$\underset{0}{x^3}-2\underset{1}{x}xy+b\underset{0}{x}x-b\underset{0}{b}x+b\underset{2}{y}y-\underset{3}{y^3};$$

oppure secondo le dimensioni di x, cioè:

$$\underset{3}{x^3}-2\underset{2}{x}xy+b\underset{2}{x}x-b\underset{1}{b}x+b\underset{0}{y}y-\underset{0}{y^3}.$$

Il primo prodotto sarà il numeratore e il secondo, diviso per x il denominatore di una frazione che esprimerà la lunghezza di BD, dalla cui estremità D si deve condurre la tangente CD".

(57) Leibniz ad Oldemburg, 21 giugno 1677; *Briefwechsel*, cit., pag. 243:" Questo stesso metodo può applicarsi anche quando si hanno radici sotto altre radici; per esempio, in un'equazione assai complessa come questa:

$$a+bx\sqrt{y^2+b\sqrt[3]{1+y}}+hyx^2\sqrt{y^2+y\sqrt{1-y}}=0$$

in una curva che abbia $y(AB)$ come ascissa, ed $x(BC)$ come ordinata, l'equazione utile per trovare la tangente TC potrà subito venir scritta senza bisogno di nessun calcolo, e cioè ..."

d) La priorità.

And M^r Newton having described in these two letters that he had a very general Analysis consisting partly in the method of converging series, partly in another method by which he applyed those series to the solution of almost all problems ([58]) .

Je n'ay jamais niè qu'à mon second voyage en Angletere j'aye vû quelques lettres de M.N[ewton] chez Monsieur Collins, mais je n'en ay jamais vû, où M.N[ewton] ait expliqué sa Methode des Fluxions, et je n'en trouve pas dans le *Commercium Epistolicum* ([59]) .

In my letter of 13th of June 1676, I said, that my Method of Series extended to almost all problems, but became not general without some other methods, meaning (as I said in my next letter) the Method of Fluxions, and the Method of Arbitrary Series; and now to take this other methods from me, is to restrain and stint the Method of Series, and make it cease to be general. ...

And if now Mr. Leibniz has been tearing this general method in pieces, and taking from me first one part, and then another part, whereby the rest is maimed, he has given a just occasion to the Committee to consider the whole ([60]) .

([58]) *Mathematical Papers*, vol.VIII, pag. 581: "In queste due lettere Newton aveva ricordato di essere in possesso di un'analisi generale, di cui una parte consisteva nel metodo delle serie convergenti, e un'altra in un metodo che permetteva di applicare quelle serie alla soluzione di quasi tutti i problemi".

([59]) Leibniz a Conti, 9 aprile 1716, *Briefwechsel*, pag. 278: "Non ho mai negato che nel mio secondo viaggio in Inghilterra abbia visto alcune lettere di Newton presso il Signor Collins, ma non ho mai visto dove Newton abbia spiegato il suo metodo delle flussioni, e continuo a non trovarlo nel *Commercium epistolicum.*"

([60]) Ivi, pag. 287-288: "Nella mia lettera del 13 giugno 1676 ho detto che il mio metodo delle serie si estendeva a quasi tutti i problemi, ma che diveniva generale solo con l'aiuto di altri metodi, intendendo con ciò (come spiegavo nella lettera seguente) il Metodo delle flussioni ed il Metodo delle serie arbitrarie. Volermi ora capire questi due altri metodi, è restringere il metodo delle serie, e limitarne la generalità. E se al sig.Leibniz è piaciuto di fare a pezzi questo mio metodo generale, e di sottrarmene prima una parte, poi un'altra, tralasciando il resto, ha offerto al Comitato una legittima occasione per esaminare il tutto nel suo complesso".

6. Unicuique suum.

Quest'ultimo brano di Newton, scritto nel 1716 a pochi mesi dalla morte del suo antagonista, è per molti aspetti rivelatore dei mutamenti che erano intevenuti tra la scoperta e i primi progressi del calcolo durante il XVII secolo, e il 1711, anno d'inizio della disputa. Nel ventennio che va dal 1690 al 1710 è avvenuto esattamente ciò di cui Newton si lamenta. Il suo metodo generale, di cui egli più volte ha vantato l'evidente superiorità rispetto a quello di Leibniz, è stato fatto a pezzi, e una gran parte gli è stata sottratta, lasciandogli solo il merito di averre sviluppato e portato a perfezione la tecnica delle serie infinite. Contrariamente però a quanto egli pensa, questo non è stato il risultato di un subdolo piano messo in opera da Leibniz e dai suoi seguaci, ma bensì il naturale svolgimento di un processo storico che aveva le sue radici nei due diversi punti di vista che abbiamo messo in evidenza.

Ricordiamo un momento i termini della questione. Con il suo calcolo differenziale Leibniz aveva risolto completamente il problema delle tangenti, ed aveva posto su basi algebriche il problema delle quadrature, che peraltro era ridotto ad un caso particolare del più generale problema dell'integrazione delle equazioni differenziali. Su tali problemi, e sulle loro applicazioni alla geometria e alla meccanica, Leibniz e i suoi lavoreranno a partire dal 1684 con crescente successo.

A quell'epoca Newton aveva non solo sviluppato il suo calcolo sulle flussioni, come abbiamo visto equivalente al primo, ma era riuscito, con un abilissimo intreccio tra questo e il metodo degli sviluppi in serie ([61]) , a risolvere in maniera del tutto generale il problema inverso delle tangenti. Dove Leibniz pone dei problemi, Newton dà dunque delle soluzioni. Paradossalmente, sarà proprio questa superiorità iniziale la causa principale della sconfitta del metodo newtoniano e del prevalere del programma leibniziano.

Il fatto è che il metodo delle flussioni e delle serie chiude i problemi, in primo luogo quello dell'integrazione delle equazioni differenziali, ma non li esaurisce. Esso opera come una macchina frantumatrice: da una parte si introduce l'equazione da integrare, e dall'altra viene fuori pezzo a pezzo la soluzione sotto forma dei successivi termini della serie. Ma la serie non dà

([61]) Non sarà qui fuori luogo ricordare che il metodo delle serie si poteva proporre come metodo universale solo una volta trovati gli sviluppi di tutte le funzioni note, e cioè dopo la sistemazione newtoniana.

tutta la soluzione; infatti anche a prescindere da questioni di convergenza, il carattere delle serie è eminentemente locale: esse possono essere usate per operazioni che riguardino il comportamento della soluzione nell'intorno di un punto, ma non sono di nessun aiuto quando se ne vogliano studiare le proprietà qualitative e globali.

Ma c'è di più. Infatti, a differenza del suo collega del continente, il matematico newtoniano che avesse intrapreso lo studio di un'equazione differenziale, ad esempio in connessione con un problema di meccanica o di geometria, sapeva benissimo che esisteva un metodo, per di più elaborato dalla più alta autorità in materia, che avrebbe immediatamente condotto alla soluzione senza richiedere alcuno sforzo intellettuale. È ben vero che Newton aveva più volte ricordato l'opportunità di ricorrere alle serie solo quando fosse impossibile trovare la soluzione altrimenti; ma questa raccomandazione era ben poca cosa di fronte alla generalità e alla sicurezza delle tecniche di approssimazione, al punto che ben raramente i geometri inglesi si cimenteranno con questi importanti aspetti del calcolo, limitandosi a rinviare alla soluzione newtoniana. Quest'ultima poteva vantare un'indubbia superiorità nelle fasi iniziali del calcolo, quando i risultati del programma leibniziano erano ancora frammentari e dunque insufficienti a bilanciare la generalità. A vent'anni di distanza, e cioè al momento del divampare della disputa, la situazione si è completamente rovesciata, ed è ora il metodo di Newton ad essere eclissato dal numero e dalla qualità dei risultati ottenuti sul continente. E così Newton, che riferendosi alla situazione quale era attorno al 1680 scrive nell'*Account*, poi rifuso nella *Recensio libri*:

> When the work succeeds not in finite equations M[r] Newton has recourse to converging series & thereby his method becomes incomparably more universal than that of M[r] Leibniz which is confined to finite questions: for he has no share in the method of infinite series (62) .

Johann Bernoulli può rispondere nel 1713:

> ... Cheynaeus quondam inepte iactavit, nihil nempe intra hos 20 vel 30 annos prodisse in lucem, quae non sint iteratae repetitiones vel ad summum levia tantum corollaria eorum, quae Newtonus iam pridem

(62) *Mathematical Papers*, VIII, pag. 598: "Se l'operazione non arriva a dare equazioni finite, Newton ricorre alle serie convergenti; per cui il suo metodo risulta incomparabilmente più universale di quello di Leibniz, che è limitato alle sole equazioni finite dato che egli non ha accesso al metodo delle serie infinite."

invenerit, quasi nobis nihil amplius relictum fuisse, vel nullius esse pretii, quod subinde a nobis pubblicatum extat, et cuius in Newtonianis ne vestigium quidem videre est: qualia sunt quae de Catenariis, Velariis, Isochronis paracentris, Brachystochronis, de novis proprietatibus Cycloidis, de eius segmentiis innumeris quadrabilibus, de Calculo exponentialium seu percurrentium eosque differentiandi modo, de Coëvolutarum dimensione, de Motu traptorio, de reptorio, de Curvarum reductione ad circulares, de earum transformatione, et de innumeris aliis, quae Angli pro parte tentarunt, sed omni suo calculo fluxionum adiuti irresoluta reliquerunt, quod vel ex solo problemate Catenariae et Curvarum transformandarum patet, cui pertinaciter et longo tempore insudantes, aliud nihil quam turpes paralogismos produxerunt ([63]) .

L'elenco è impressionante, e testimonia da solo del solco che si è aperto tra i due campi. Più ancora però impressiona il fatto che nessuno dei risultati menzionati da Bernoulli sia stato ottenuto da matematici inglesi o sia derivato da problemi da essi proposti o studiati. Questi sono del tutto estranei al punto di vista newtoniano, e quando Newton o altri si cimenteranno con qualcuno di questi o con altri problemi simili, lo faranno solo a causa di stimoli e sfide provenienti dal continente.

Nè probabilmente poteva essere altrimenti. Perchè per entrare come parte attiva nell'attuazione di quello che oggi ci appare come un vero e proprio programma leibniziano di costruzione della nuova analisi occerreva, se non compiere una scelta di campo, certo abbandonare il terreno della stretta ortodossia; e se non era necessario diventare leibniziani, di certo si doveva smettere di essere newtoniani.

Non era necessario diventare leibniziani; infatti, nonostante quanto taluni hanno sostenuto e sostengono, l'uso delle notazioni newtoniane, senza dubbio meno eleganti e complete di quelle del calcolo differenziale, non costituiva

([63]) Johann Bernoulli a Leibniz, 29 giugno 1713. GM III, pag. 916: "... Cheyne tempo fa sosteneva a sproposito che negli ultimi 20 o 30 anni non era stato pubblicato nulla, che non sia un'ennesima ripetizione o al più un corollario di poco peso di ciò che Newton aveva trovato prima; quasi che per noi non fosse rimasto nulla da fare, e che non siano di nessun pregio le cose che abbiamo pubblicato, e delle quali in Newton non si trovano nemmeno le tracce, come le Catenarie, le Velarie, le Isocrone paracentriche, le Brachistocrone, le nuove proprietà della Cicloide e i suoi innumerevoli segmenti quadrabili, il Calcolo degli esponenziali e il metodo di differenziarli, la misura delle Coevolute, il Moto trattorio e reptorio, la riduzione delle curve alle circolari, e innumerevoli altre che gli inglesi in parte tentarono, ma con tutto il loro calcolo delle flussioni hanno lasciato irrisolte, come si vede dal solo problema della Catenaria e della Trasformazione delle curve, al quale hanno sudato per lungo tempo senza produrre altro che turpi paralogismi."

una serie remora nell'affrontare problemi geometrici e meccanici, ed anzi in alcuni casi, come ad esempio nei problemi di dinamica nei quali le notazioni newtoniane sono tuttora in uso, queste erano altrettante adatte delle altre.

Si doveva però smettere di essere newtoniani; dato che era essenziale separare in due parti la teoria di Newton, e di queste assumere solo il calcolo flussionale, relegando le serie tra i procedimenti di approssimazione numerica. In altre parole era necessario compiere quella separazione tra il metodo delle flussioni e quello delle serie della quale Newton aveva accusato il suo antagonista. Che poi si assegnasse a Newton la paternità di uno, solo o di ambedue tali metodi era tutto sommato secondario; quello che contava era la necessità di riconoscere che nel giudizio sulla loro importanza relativa Leibniz aveva ragione e Newton aveva torto.

Nessuno dei geometri inglesi se la sentirà di compiere un tale passo per tutto il settecento; al contrario tutti continueranno a proclamare non solo l'indiscutibile priorità di Newton per quanto riguarda l'invenzione del metodo delle flussioni, ma anche la superiorità, altrettanto indiscutibilmente smentita dai fatti, del suo metodo generale delle serie. Così facendo, porteranno la matematica inglese nella migliore dell'ipotesi a dedicarsi esclusivamente ai problemi degli sviluppi in serie, e altrimenti ad estenuarsi su questioni fondazionali senza sbocchi ([64]) . Nel momento in cui la sentenza della Royal Society sancisce la priorità della scoperta newtoniana, quella meno tangibile ma più duratura della storia riequilibra la bilancia stabilendo il primato del programma leibniziano.

E.GIUSTI - Dipartimento di Matematica
Università di Firenze

Conferenza pervenuta in redazione il 20/V/1988

([64]) Si veda la polemica seguita alla pubblicazione del già ricordato *The Analist*, su cui lungamente si sofferma G.Giorello nel suo *Lo spettro e il libertino*, Mondadori, Milano, 1985. Con ciò ovviamente non vogliamo sostenere la tesi semplificatrice che il successo della scuola leibniziana sia dovuto unicamente al punto di vista; meno che mai, come talvolta si è affermato, alle notazioni indubbiamente migliori del calcolo differenziale rispetto a quelle flussionali: ci sarà pure qualche differenza di qualità scientifica tra i Bernoulli ed Eulero da una parte e Taylor e MacLaurin (per non citare che gli esponenti più rappresentativi delle due fazioni) dall'altra. Non bisogna però neanche trascurare l'altra faccia della medaglia, e cioè che una disciplina scientifica attira persone di valore quando lascia intravedere problemi interessanti, e non quando propone la soluzione di esercizi.